

Travaux Dirigés URM (2)

Un ordre bien fondé est une relation d'ordre pour laquelle toutes les suites strictement décroissantes sont finies. L'ordre habituel sur \mathbb{N} est bien fondé, sur \mathbb{Z} il ne l'est pas. Tout ordre sur un ensemble fini est évidemment bien fondé.

Exercice 1

On définit l'ordre lexicographique sur \mathbb{N}^2 par :

$$(n_1, n_2) \leq_L (m_1, m_2) \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 < m_1 \\ n_1 = m_1 \text{ et } n_2 \leq m_2 \end{cases}$$

Montrer que cet ordre est bien fondé.

Exercice 2

Soit A un alphabet fini totalement ordonné. On se place dans A^* le monoïde libre engendré par A .

Donner la définition de l'ordre lexicographique, de l'ordre préfixe.

Montrer que l'ordre lexicographique n'est pas bien fondé mais que l'ordre préfixe l'est.

Exercice 3

Considérons la définition de la fonction d'Ackermann :

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & \text{si } m = 0 \\ A(1, m - 1) & \text{si } n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)) & \text{sinon} \end{cases}$$

- calculer les fonctions $A_1 = A(1, n)$, $A_2 = A(2, n)$, $A_3 = A(3, n)$. Donner une définition récursive de $A_4 = A(4, n)$,
- Montrer que $A(n, m)$ est bien définie. On pourra procéder de deux manières :
 - Énoncer une propriété P_m portant sur les valeurs de $A(m, n)$ pour tout n . On montrera P_m par récurrence sur m . Chacune des propriétés P_{m+1} se montrera par récurrence sur n .
 - Utiliser le principe d'induction générale sur un ordre bien fondé.

Exercice 4

On rappelle qu'une façon d'énumérer \mathbb{N}^2 est de considérer la fonction

$$\phi(n_1, n_2) = 2^{n_1}(2n_2 - 1) - 1$$

Donner une énumération des éléments de \mathbb{N}^3 .

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$, et $y \in \mathbb{N}$. Soient f une fonction de n variables et g une fonction de $n + 2$ variables. La définition h de \mathbb{N}^{n+1} dans \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} h(x, 0) & = f(x) \\ h(x, y + 1) & = g(g, y, h(x, y)) \end{cases}$$

est primitive récursive. La fonction h est totale si f et g le sont.

Si f et g sont calculables alors h est calculable .

Exercice 5

Définir la somme, le produit et la puissance de deux entiers par récursion primitive.

La suite de Fibonacci, la fonction d'Ackermann peuvent-elle être définies par récursion primitive ?

Exercice 6

On considère l'ensemble \mathcal{F} l'ensemble des fonctions (partielles) de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . Pour une fonction f on note $D(f)$ son domaine de définition. On ordonne \mathcal{F} par :

$$f \leq_{\mathcal{F}} g \Leftrightarrow \forall x \in D(f), f(x) = g(x)$$

Montrer que c'est une relation d'ordre. Cet ordre est-il bien fondé? On pourra considérer f_n la fonction qui vaut i au point i pour $n \leq i$ et n'est pas définie sinon.

Un élément f de \mathcal{F} est dit maximal s'il n'admet pas d'éléments plus grand que lui :

$$\forall g \in \mathcal{F} f \leq_{\mathcal{F}} g \Rightarrow f = g$$

Quels sont les éléments maximaux de \mathcal{F} ?

Étant données deux fonctions f_1 et f_2 montrer qu'on peut toujours trouver une fonction f qui soit plus petite que f_1 et f_2 et qui soit maximale parmi les minorants de f_1 et f_2 :

$$\begin{aligned} f \leq_{\mathcal{F}} f_1 \text{ et } f \leq_{\mathcal{F}} f_2 \\ \forall g \in \mathcal{F}, g \leq_{\mathcal{F}} f_1 \text{ et } g \leq_{\mathcal{F}} f_2 \Rightarrow g \leq_{\mathcal{F}} f \end{aligned}$$

La fonction f se nomme la borne inférieure de f_1 et f_2 .

Peut-on toujours trouver une borne supérieure pour deux fonctions f_1 et f_2 ?