# Preuves et Calculs

**$\lambda$-calcul non typé**

**Exercice 1** Calculer $(y\ (\lambda v.(x\ v)))[x := \lambda y.(v\ y)]$.

**Exercice 2** On définit les $\lambda$-termes suivants :

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{T} \stackrel{\triangle}{=} \lambda x.\lambda y.x & \boldsymbol{F} \stackrel{\triangle}{=} \lambda x.\lambda y.y & \boldsymbol{If} \stackrel{\triangle}{=} \lambda b.\lambda x.\lambda y.((b\ x)\ y) \\ \boldsymbol{And} \stackrel{\triangle}{=} \lambda x.\lambda y.((x\ y)\ \boldsymbol{F}) & \boldsymbol{Or} \stackrel{\triangle}{=} \lambda x.\lambda y.((x\ \boldsymbol{T})\ y) & \end{array}$$

Montrer que : $\begin{array}{lll} \boldsymbol{If}\ \boldsymbol{T}\ x\ y \rightarrow^\star_\beta x & \boldsymbol{If}\ \boldsymbol{F}\ x\ y \rightarrow^\star_\beta y & \boldsymbol{And}\ \boldsymbol{T}\ y \rightarrow^\star_\beta y \\ \boldsymbol{And}\ \boldsymbol{F}\ y \rightarrow^\star_\beta \boldsymbol{F} & \boldsymbol{Or}\ \boldsymbol{T}\ y \rightarrow^\star_\beta \boldsymbol{T} & \boldsymbol{Or}\ \boldsymbol{F}\ y \rightarrow^\star_\beta y \end{array}$.

A-t-on $\boldsymbol{And}\ x\ \boldsymbol{F} \rightarrow^\star_\beta \boldsymbol{F}$ ?

**Exercice 3** Un combinateur de point fixe $t$ est un $\lambda$-terme clos (i.e., un $\lambda$-terme ne contenant pas de variables libres) tel que pour tout $\lambda$-terme $t'$, $(t\ t') =_\beta (t'\ (t\ t'))$.

1. Montrer que le terme $\boldsymbol{Y}$ de Curry défini par :

$$\boldsymbol{Y} \stackrel{\triangle}{=} \lambda f.((\lambda x.(f\ (x\ x)))\ (\lambda x.(f\ (x\ x))))$$

   est un combinateur de point fixe.

2. Montrer que le terme $((\lambda z.\lambda x.(x\ (z\ z\ x)))\ (\lambda z.\lambda x.(x\ (z\ z\ x))))$ est un combinateur de point fixe.

**Exercice 4**
A-t-on $((\lambda z.z)\ (\lambda x.(y\ x))) =_\alpha ((\lambda w.w)\ (\lambda z.(z\ x)))$ ? $\lambda z.\lambda x.(z\ \lambda z.x) =_\alpha \lambda y.\lambda z.(y\ \lambda y.z)$ ?

**Exercice 5** A tout $\lambda$-terme $t \in \Lambda$, on associe un entier $\tau(t)$ correspondant à la taille de $t$. La fonction $\tau$ est définie comme suit :

$$\tau : \Lambda \rightarrow \mathbb{N} \qquad \tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = x \\ 1 + \tau(t_1) + \tau(t_2) & \text{si } t = (t_1\ t_2) \\ 1 + \tau(t_0) & \text{si } t = \lambda x.t_0 \end{cases}$$

Pour simplifier, on suppose, dans cet exercice, que l'on applique une substitution $[x := t']$ à un terme $t$ uniquement lorsque les variables liées de $t$ ont été renommées "en dehors" des variables libres de $t'$.

1. Montrer que renommer une variable dans un terme ne modifie pas la taille de ce terme. Plus formellement, montrer, par induction sur $t$, que :

$$\forall t \in \Lambda \quad \forall x, y \in V \quad \tau(t) = \tau(t[x := y])$$

2. Montrer que deux termes $\alpha$-équivalents ont la même taille. Plus formellement, montrer, par induction sur (l'arbre d'inférence de) $t_1 =_\alpha t_2$, que :

$$\forall t_1, t_2 \in \Lambda \quad t_1 =_\alpha t_2 \Rightarrow \tau(t_1) = \tau(t_2)$$

**Exercice 6** Les $\lambda$-termes $\boldsymbol{Y}$ (défini dans l'exercice 3) et $\lambda f.\lambda g.\lambda x.(f\ (g\ x))$ sont-ils typables ? Si oui, donner leur type.

**Exercice 7** Les entiers peuvent être représentés en $\lambda$-calcul par des itérateurs de fonction. Cette méthode, due à Church, consiste à "coder" un entier $n$ en un terme, noté $\underline{n}$, et défini comme suit :

$$\underline{n} \stackrel{\triangle}{=} \lambda f.\lambda x.\underbrace{(f\ (f\ (\cdots (f\ x))))}_{n \text{ applications}} = \lambda f.\lambda x.(f^n\ x)$$

1. Quel est le type des termes $\underline{0}$, $\underline{1}$ et $\underline{2}$ ?
2. On définit la fonction successeur par $succ \stackrel{\triangle}{=} \lambda n.\lambda f.\lambda x.((n\ f)\ (f\ x))$.
   (a) Typer $succ$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad (succ\ \underline{n}) =_\beta \underline{n+1}$.
3. Montrer, par récurrence sur $n$, que le type de $\underline{n}$ est $(A \to A) \to A \to A$ où $A$ est n'importe quel type.

## Logique minimale propositionnelle

**Exercice 8** Construire un arbre de preuve sans coupure de $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B))$ et donner le $\lambda$-terme correspondant à cette preuve.

**Exercice 9**
1. Construire un arbre de preuve $D_1$ sans coupure de

   $$\varphi_1 \stackrel{\triangle}{=} (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

   Donner le $\lambda$-terme $t_1$ correspondant à cette preuve.
2. Construire un arbre de preuve $D_2$ sans coupure de

   $$\varphi_2 \stackrel{\triangle}{=} (A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

   Donner le $\lambda$-terme $t_2$ correspondant à cette preuve.
3. Soit $t$ le $\lambda$-terme défini par $t \stackrel{\triangle}{=} \lambda w.(t_1\ (t_2\ w))$.
   (a) Typer le $\lambda$-terme $t$ et construire l'arbre de preuve $D$ correspondant à $t$.
   (b) Construire un arbre de preuve $D'$ en éliminant les coupures de $D$.
   (c) Soit $t'$ le $\lambda$-terme correspondant à la forme normale de $t$. Calculer $t'$ et vérifier que l'arbre de preuve $D'$ correspond à $t'$.

## Conjonction/Produit de types

**Exercice 10**
Construire un arbre de preuve sans coupure de $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C)))$ et donner le $\lambda$-terme correspondant à cette preuve.

**Exercice 11** Typer le $\lambda$-terme $\lambda x.\lambda y.((x\ \mathsf{fst}(y))\ \mathsf{snd}(y))$ et construire l'arbre de preuve lui correspondant.

**Exercice 12** On considère l'arbre de preuve $D$ suivant :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A \Rightarrow (C \Rightarrow A)$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A \wedge B$}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A$}
\LeftLabel{(?)}
\BinaryInfC{$\underbrace{A \wedge B, A \Rightarrow (C \Rightarrow A), A \wedge B}_{\Gamma} \vdash C \Rightarrow A$}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow (C \Rightarrow A), A \wedge B \vdash (A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$A \wedge B \vdash (A \Rightarrow (C \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A))$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$C, A, A \wedge B \vdash A$}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$A, A \wedge B \vdash C \Rightarrow A$}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$A \wedge B \vdash A \Rightarrow (C \Rightarrow A)$}
\LeftLabel{(?)}
\BinaryInfC{$A \wedge B \vdash (A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$}
\AxiomC{}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$A \wedge B \vdash A \wedge B$}
\LeftLabel{(?)}
\BinaryInfC{$A \wedge B \vdash C \Rightarrow A$}
\LeftLabel{(?)}
\UnaryInfC{$\vdash (A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$}
\end{prooftree}
$$

1. Quelles sont les règles utilisées dans cette preuve ? Remplacer les "?" par les noms de règle.

2. Cette preuve contient au moins une coupure. Indiquer clairement ou elle se situe.

3. Eliminer les coupures de $D$ en expliquant pour chaque étape les différentes transformations que vous effectuez sur l'arbre (attention, l'élimination d'une coupure peut en introduire une autre !). Soit $D'$ l'arbre de preuve obtenu.

4. Construire le $\lambda$-terme $t$ correspondant à $D$.

5. Normaliser le terme $t$. Quel est le type du terme obtenu ? Pourquoi ? A quelle preuve correspond il ? Pourquoi ?

## Disjonction/Type somme

**Exercice 13** Typer le $\lambda$-terme :

$$\lambda x.\mathsf{case}_{\tau,\tau}\ x\ \mathsf{of}\ \mathsf{inj}^{l}_{\tau,\tau}(x_1) \mapsto x_1 \mid \mathsf{inj}^{r}_{\tau,\tau}(x_2) \mapsto x_2$$

et construire l'arbre de preuve lui correspondant.

**Exercice 14** Construire un arbre de preuve sans coupure de la formule :

$$(A \vee (B \vee C)) \Rightarrow ((A \vee B) \vee C)$$

et donner le $\lambda$-terme correspondant à cette preuve.

**Exercice 15**

1. Construire un arbre de preuve sans coupure de la formule :

$$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$$

   et donner le $\lambda$-terme correspondant à cette preuve.

2. Pourquoi la formule $\varphi$ :

$$((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$$

n'est-elle pas prouvable ? On pourra expliquer le problème rencontré dans l'écriture d'un programme (i.e., d'un $\lambda$-terme) de type $\varphi$.

**Exercice 16** Construire un arbre de preuve sans coupure de

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R))$$

et donner le $\lambda$-terme correspondant à cette preuve.

**Exercice 17** Construire un arbre de preuve sans coupure de

$$(A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

et donner le $\lambda$-terme correspondant à cette preuve.

**Exercice 18** Construire un arbre de preuve sans coupure de

$$((P \wedge Q) \vee (P \vee Q)) \Rightarrow (P \vee Q)$$

et donner le $\lambda$-terme correspondant à cette preuve.

**Exercice 19**

1. Typer le $\lambda$-terme :

$$t_1 \triangleq \lambda x.\mathsf{case}_{\tau_2,\tau_3}\ \mathsf{snd}(x)\ \mathsf{of}\quad \begin{array}{ll} & \mathsf{inj}^l_{\tau_2,\tau_3}(x_1) \mapsto \mathsf{inj}^l_{\tau_1\times\tau_2,\tau_1\times\tau_3}(\mathsf{fst}(x), x_1) \\ \mid & \mathsf{inj}^r_{\tau_2,\tau_3}(x_2) \mapsto \mathsf{inj}^r_{\tau_1\times\tau_2,\tau_1\times\tau_3}(\mathsf{fst}(x), x_2) \end{array}$$

et construire l'arbre de preuve $D_1$ lui correspondant.

2. Construire un arbre de preuve $D_2$ sans coupure de

$$\varphi_2 \triangleq ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \Rightarrow (A \wedge (B \vee C))$$

Donner le $\lambda$-terme $t_2$ correspondant à cette preuve.

3. Construire un arbre de preuve $D_3$ sans coupure de

$$\varphi_3 \triangleq A \Rightarrow (A \wedge (A \vee B))$$

Donner le $\lambda$-terme $t_3$ correspondant à cette preuve.

4. Soit $t$ le $\lambda$-terme défini par $t \triangleq \lambda w.\mathsf{fst}((t_2\ (t_1\ (t_3\ w))))$.
   (a) Typer le $\lambda$-terme $t$ et construire l'arbre de preuve $D$ correspondant à $t$.
   (b) Construire un arbre de preuve $D'$ en éliminant les coupures de $D$.
   (c) Soit $t'$ le $\lambda$-terme correspondant à la forme normale de $t$. Calculer $t'$ et vérifier que l'arbre de preuve $D'$ correspond à $t'$.

**Exercice 20**

1. Construire 3 preuves différentes du séquent $\vdash A \Rightarrow ((A \vee A) \vee A)$ et donner les 3 $\lambda$-termes $t_1$, $t_2$ et $t_3$ correspondant à ces preuves.

2. Typer le $\lambda$-terme :

$$t_4 = \lambda x.\mathsf{case}_{A+A,A}\ x\ \mathsf{of}\quad \begin{array}{l} \mathsf{inj}^l_{A+A,A}(x_1) \mapsto \left( \begin{array}{ll} \mathsf{case}_{A,A}\ x_1\ \mathsf{of} & \mathsf{inj}^l_{A,A}(y_1) \mapsto y_1 \\ & \mid\ \mathsf{inj}^l_{A,A}(y_2) \mapsto y_2 \end{array} \right) \\ \mid\ \mathsf{inj}^r_{A+A,A}(x_2) \mapsto x_2 \end{array}$$

3. Soit $t_5$ le $\lambda$-terme $t_5 = \lambda w.(t_4\ (t_1\ w))$.

   (a) De quelle proposition le $\lambda$-terme $t_5$ est-il une preuve ? Pourquoi ? Construire cette preuve. Admet-elle une coupure ? Pourquoi ? Si oui, indiquer clairement ou se situe une coupure dans cette preuve.

   (b) Soit $t_6$ la forme normale du $\lambda$-terme $t_5$. Calculer $t_6$.

   (c) De quelle proposition le $\lambda$-terme $t_6$ est-il une preuve ? Pourquoi ? Cette preuve contient-elle une coupure ? Pourquoi ?

4. Parmi les $\lambda$-termes de l'ensemble $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$ quels sont ceux qui :

   (a) sont $\alpha$-équivalents ?

   (b) sont $\beta$-équivalents ?

   (c) sont en forme normale ?

**Exercice 21**

1. Trouver une formule $\varphi$ de la logique des propositions telle que les séquents :

$$\vdash ((A \Rightarrow B) \wedge (A \vee B)) \Rightarrow \varphi \qquad \vdash \varphi \Rightarrow (A \vee B)$$

   soient prouvables. Construire ces preuves et les $\lambda$-termes correspondants.

2. Utiliser les 2 $\lambda$-termes de la question précédente pour construire un $\lambda$-terme $t$ correspondant à une preuve avec coupure. Indiquer clairement cette coupure sur l'arbre de preuve.

3. Quel est le type de la forme normale de $t$ ? Pourquoi ?

**Exercice 22**

1. Qu'est ce qu'un radical ? Qu'est ce que la normalisation ?

2. Donner un exemple de $\lambda$-terme $t$ (**non déja vu en cours/TD/TME**) contenant au moins un radical.

3. A quelle preuve $\pi$ correspond le $\lambda$-terme $t$ ?

4. Cette preuve admet-elle une coupure ? Pourquoi ? Si oui, construire une preuve $\pi'$ en éliminant la(les) coupure(s) de $\pi$.

5. Calculer la forme normale $t'$ de $t$.

6. A quelle preuve correspond $t'$ ? Pourquoi ?