

## Sémantique opérationnelle à petits pas

Sémantique opérationnelle à grands pas :

- manipule des jugements qui permettent uniquement de spécifier l'**état final** de la mémoire après l'exécution d'un programme
- ne donne pas d'informations précises sur les étapes qui ont conduit à cet état.
- ne permet pas de modéliser l'exécution des programmes qui ne terminent pas.

Définition d'une **sémantique opérationnelle à petits pas**

- **configuration** : paire  $\langle c, \sigma \rangle$  ( $c \in E_C$ ,  $\sigma \in \mathcal{V}[\mathbb{Z}]$ )
- **Relation de transition**  $\hookrightarrow$  entre configurations

De manière intuitive,  $\langle c, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c', \sigma' \rangle$  exprime qu'exécuter une étape de  $c$  dans un état  $\sigma$  conduit dans un état  $\sigma'$  où il restera à exécuter  $c'$ .

## Relation de transition

$$(S_1) \frac{\langle a, \sigma \rangle \rightsquigarrow n}{\langle x := a, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma[x \leftarrow n] \rangle}$$

$$(S_2) \frac{\langle c_1, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c'_1, \sigma' \rangle}{\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c'_1; c_2, \sigma' \rangle} \quad (S_3) \frac{}{\langle \text{skip}; c, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c, \sigma \rangle}$$

$$(S_4) \frac{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}}{\langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c_1, \sigma \rangle} \quad (S_5) \frac{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{false}}{\langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c_2, \sigma \rangle}$$

$$(S_6) \frac{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{false}}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma \rangle}$$

$$(S_7) \frac{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c; \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle}$$

## Séquence de calcul

**Séquence de calcul** : suite, éventuellement infinie, de la forme :

$$\langle c_0, \sigma_0 \rangle \hookrightarrow \langle c_1, \sigma_1 \rangle \hookrightarrow \langle c_2, \sigma_2 \rangle \hookrightarrow \dots$$

telle que  $\forall i \geq 0$ ,  $\langle c_i, \sigma_i \rangle \hookrightarrow \langle c_{i+1}, \sigma_{i+1} \rangle$  admette un arbre de d'inférence à partir des règles définissant  $\hookrightarrow$ .

**Configuration terminale** :  $\langle \text{skip}, \sigma \rangle$

$\langle c, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \langle e', \sigma' \rangle$  ssi il existe une séquence de calcul de longueur finie  $\langle c_0, \sigma_0 \rangle \hookrightarrow \langle c_1, \sigma_1 \rangle \hookrightarrow \langle c_2, \sigma_2 \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle c_k, \sigma_k \rangle$  avec  $c = c_0$ ,  $\sigma = \sigma_0$ ,  $c' = c_k$  et  $\sigma' = \sigma_k$ .

$\langle c, \sigma \rangle \xrightarrow{k} \langle e', \sigma' \rangle$  ssi il existe une séquence de calcul de longueur  $k$   $\langle c_0, \sigma_0 \rangle \hookrightarrow \langle c_1, \sigma_1 \rangle \hookrightarrow \langle c_2, \sigma_2 \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle c_k, \sigma_k \rangle$  avec  $c = c_0$ ,  $\sigma = \sigma_0$ ,  $c' = c_k$  et  $\sigma' = \sigma_k$ .

De plus, si  $c_k = \text{skip}$  (configuration terminale), alors  $\langle c, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \sigma'$ .

## Sémantique opérationnelle à petits pas : Exemple

$\langle x := 0 ; \text{while } x \leq 0 \text{ do } x := x + 1, \sigma \rangle$   
 $\hookrightarrow \langle \text{skip} ; \text{while } x \leq 0 \text{ do } x := x + 1, \sigma[x \leftarrow 0] \rangle$   
 $\hookrightarrow \langle \text{while } x \leq 0 \text{ do } x := x + 1, \sigma[x \leftarrow 0] \rangle$   
 $\hookrightarrow \langle x := x + 1 ; \text{while } x \leq 0 \text{ do } x := x + 1, \sigma[x \leftarrow 0] \rangle$   
 $\hookrightarrow \langle \text{skip} ; \text{while } x \leq 0 \text{ do } x := x + 1, \sigma[x \leftarrow 1] \rangle$   
 $\hookrightarrow \langle \text{while } x \leq 0 \text{ do } x := x + 1, \sigma[x \leftarrow 1] \rangle$   
 $\hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma_2 \rangle$

## Composition

**Lemme** Si  $\langle c_0, \sigma_0 \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle c_n, \sigma_n \rangle$ , alors  $\forall c \in E_C$ , il existe une séquence  $\langle c_0; c, \sigma_0 \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle c_n; c, \sigma_n \rangle$ .

PREUVE : Induction sur la (longueur de la) séquence.

- Pour  $\langle c_0, \sigma_0 \rangle \hookrightarrow \langle c_1, \sigma_1 \rangle$ , il suffit d'appliquer la règle  $S_2$  pour obtenir la séquence  $\langle c_0; c, \sigma_0 \rangle \hookrightarrow \langle c_1; c, \sigma_1 \rangle$ .
- Pour une séquence de longueur  $n + 1$  :

$$\langle c_0, \sigma_0 \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle c_n, \sigma_n \rangle \hookrightarrow \langle c_{n+1}, \sigma_{n+1} \rangle$$

Par hypothèse d'induction, il existe une séquence :

$$\langle c_0; c, \sigma_0 \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle c_n; c, \sigma_n \rangle$$

et la règle  $S_2$  permet d'obtenir la transition  $\langle c_n; c, \sigma_n \rangle \hookrightarrow \langle c_{n+1}; c, \sigma_{n+1} \rangle$  à partir de la transition  $\langle c_n, \sigma_n \rangle \hookrightarrow \langle c_{n+1}, \sigma_{n+1} \rangle$  ce qui permet de construire la séquence :  $\langle c_0; c, \sigma_0 \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle c_n; c, \sigma_n \rangle \hookrightarrow \langle c_{n+1}; c, \sigma_{n+1} \rangle$

## Equivalence sémantique (1)

**Proposition**  $\forall c \in E_C \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma \quad \langle c, \sigma_1 \rangle \rightarrow \sigma_2 \Rightarrow \langle c, \sigma_1 \rangle \xrightarrow{*} \sigma_2$

PREUVE : Induction sur  $\langle c, \sigma_1 \rangle \rightarrow \sigma_2$ .

$$(C_1) \frac{}{\langle \text{skip}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma}$$

Puisque  $\langle \text{skip}, \sigma \rangle$  est une configuration terminale, on a bien  $\langle \text{skip}, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \sigma$

$$(C_2) \frac{(A_i) \frac{\vdots}{\langle a, \sigma \rangle \rightsquigarrow n}}{\langle x := a, \sigma \rangle \rightarrow \sigma[x \leftarrow n]}$$

On peut construire l'arbre :

$$(S_1) \frac{(A_i) \frac{\vdots}{\langle a, \sigma \rangle \rightsquigarrow n}}{\langle x := a, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma[x \leftarrow n] \rangle}$$

On obtient la séquence  $\langle x := a, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma[x \leftarrow n] \rangle$  et puisque  $\langle \text{skip}, \sigma[x \leftarrow n] \rangle$  est terminale, on a bien  $\langle x := a, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \sigma[x \leftarrow n]$ .

## Equivalence sémantique (2)

$$(C_3) \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (C_i) \frac{}{\langle c_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma_1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (C_j) \frac{}{\langle c_2, \sigma_1 \rangle \rightarrow \sigma_2} \end{array}}{\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma_2}$$

Par hypothèse d'induction, on a  $\langle c_1, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \sigma_1$  et  $\langle c_2, \sigma_1 \rangle \xrightarrow{*} \sigma_2$  et donc :

$$\langle c_1, \sigma \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma_1 \rangle \quad (9)$$

$$\langle c_2, \sigma_1 \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma_2 \rangle \quad (10)$$

D'après le lemme précédent, à partir de la séquence (9), on a :

$$\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle \text{skip}; c_2, \sigma_1 \rangle \quad (11)$$

La règle  $S_3$  permet de construire la transition :

$$\langle \text{skip}; c_2, \sigma_1 \rangle \hookrightarrow \langle c_2, \sigma_1 \rangle \quad (12)$$

et à partir de (11), (12) et (10), on peut obtenir la séquence :

$$\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma_2 \rangle$$

ce qui permet finalement d'établir  $\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \sigma_2$ .

### Equivalence sémantique (3)

$$(C_4) \frac{(B_i) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}} \quad (C_j) \frac{\vdots}{\langle c_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma_1}}{\langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma_1}$$

Par hypothèse d'induction,  $\langle c_1, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \sigma_1$  et on a donc  $\langle c_1, \sigma \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma_1 \rangle$ . A partir de  $\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}$  on a :

$$(S_4) \frac{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}}{\langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c_1, \sigma \rangle}$$

On a alors  $\langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c_1, \sigma \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma_1 \rangle$  ce qui permet d'établir  $\langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \sigma_1$ .

$$(C_5) \frac{(B_i) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{false}} \quad (C_j) \frac{\vdots}{\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma_1}}{\langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma_1}$$

Raisonnement similaire au cas précédent.

## Equivalence sémantique (4)

$$(C_6) \frac{(B_i) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{false}}}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma}$$

A partir de l'arbre de  $\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{false}$  présent dans l'arbre en hypothèse, on peut construire l'arbre :

$$(S_6) \frac{(B_i) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{false}}}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma \rangle}$$

ce qui permet d'établir  $\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \sigma$ .

## Equivalence sémantique (5)

$$(C_7) \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (B_i) \frac{}{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (C_j) \frac{}{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma_1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (C_k) \frac{}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma_1 \rangle \rightarrow \sigma_2} \end{array}}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma_2}$$

Par hypothèse d'induction on a :

$$\langle c, \sigma \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma_1 \rangle \quad (13)$$

$$\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma_1 \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma_2 \rangle \quad (14)$$

A partir de (13), on obtient :

$$\langle c; \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle \text{skip}; \text{while } b \text{ do } c, \sigma_1 \rangle \quad (15)$$

$$\text{règle } S_3 \quad \langle \text{skip}; \text{while } b \text{ do } c, \sigma_1 \rangle \hookrightarrow \langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma_1 \rangle \quad (16)$$

$$\text{règle } S_7 \quad \langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c; \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \quad (17)$$

A partir de (17), (15), (16) et (14), on obtient :

$$\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma_2 \rangle \text{ et donc } \langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \sigma_2.$$

## Equivalence sémantique (6)

**Lemme** Si  $\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \xrightarrow{k} \sigma''$ , alors  $\exists \sigma' \in \mathcal{V}[\mathbb{Z}]$ ,  $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ , tels que  $\langle c_1, \sigma \rangle \xrightarrow{k_1} \sigma'$ ,  $\langle c_2, \sigma' \rangle \xrightarrow{k_2} \sigma''$  avec  $k = k_1 + k_2$ .

PREUVE : Par récurrence bien fondée sur  $k$ .

Si  $k = 0$  alors la propriété est triviale. Supposons cette propriété vraie pour tout  $k \leq k_0$  et montrons la pour  $k_0 + 1$  (récurrence bien fondée).

On distingue deux cas :

(1).  $\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c'_1; c_2, \sigma_1 \rangle \xrightarrow{k_0} \sigma''$  avec  $\langle c_1, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c'_1, \sigma_1 \rangle$ . Par hypothèse de récurrence, il existe  $k'_1, k'_2 \in \mathbb{N}$  et une valuation  $\sigma'$  tels que

$\langle c'_1, \sigma_1 \rangle \xrightarrow{k'_1} \sigma'$ ,  $\langle c_2, \sigma'_1 \rangle \xrightarrow{k'_2} \sigma''$  avec  $k_0 = k'_1 + k'_2$ . et on peut conclure avec  $k_1 = k'_1 + 1$  et  $k_2 = k'_2$ .

(2).  $\langle \text{skip}; c_2, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c_2, \sigma_1 \rangle \xrightarrow{k_0} \sigma''$  et on peut conclure avec  $k_1 = 0$  et  $k_2 = k_0$ .

## Equivalence sémantique (7)

**Proposition**  $\forall c \in E_C \quad \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma \quad \langle c, \sigma \rangle \xrightarrow{*} \sigma' \Rightarrow \langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$

PREUVE : On a la séquence :

$$\langle c, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c_1, \sigma_1 \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle c_k, \sigma_k \rangle = \langle \text{skip}, \sigma' \rangle$$

Induction sur la séquence de calcul.

- $\langle x := a, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma[x \leftarrow n] \rangle$  avec  $\langle a, \sigma \rangle \rightsquigarrow n$ . On conclut en construisant l'arbre :

$$(C_2) \frac{(A_i) \frac{\vdots}{\langle a, \sigma \rangle \rightsquigarrow n}}{\langle x := a, \sigma \rangle \rightsquigarrow \langle \text{skip}, \sigma[x \leftarrow n] \rangle}$$

### Equivalence sémantique (8)

- $\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c'_1; c_2, \sigma_1 \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma' \rangle$  avec  $\langle c_1, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c'_1, \sigma_1 \rangle$ .

D'après le lemme précédent, il existe une valuation  $\sigma_0$  et deux entiers  $k_1$  et  $k_2$  (avec  $k_1 + k_2 = k$ ) tels que  $\langle c_1, \sigma \rangle \xrightarrow{k_1} \sigma_0$  et  $\langle c_2, \sigma_0 \rangle \xrightarrow{k_2} \sigma'$ . Par hypothèse d'induction on a  $\langle c_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma_0$  et  $\langle c_2, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma'$  et on conclut en construisant l'arbre :

$$(C_3) \frac{(C_i) \frac{\vdots}{\langle c_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma_0} \quad (C_j) \frac{\vdots}{\langle c_2, \sigma_0 \rangle \rightsquigarrow \sigma'}}{\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'}$$

- $\langle \text{skip}; c_2, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c_2, \sigma \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma' \rangle$  Par hypothèse d'induction on a  $\langle c_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'$  et on conclut en construisant l'arbre :

$$(C_3) \frac{(C_i) \frac{\vdots}{\langle \text{skip}, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma} \quad (C_j) \frac{\vdots}{\langle c_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'}}{\langle c_1; c_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'}$$

## Equivalence sémantique (9)

- $\langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c_1, \sigma \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma' \rangle$  avec  $\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}$ .

Par hypothèse d'induction on a  $\langle c_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'$  et on conclut en construisant l'arbre :

$$(C_4) \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (B_i) \frac{}{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (C_j) \frac{}{\langle c_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'} \end{array}}{\langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'}$$

- $\langle \text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c_2, \sigma \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma' \rangle$  avec  $\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{false}$ .

Raisonnement similaire au cas précédent.

- $\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma \rangle$  avec  $\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{false}$ . On conclut en

construisant l'arbre :

$$(C_6) \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (B_i) \frac{}{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{false}} \end{array}}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma}$$

## Equivalence sémantique (10)

- $\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle c; \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \langle \text{skip}, \sigma' \rangle$  avec  $\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}$ . Par hypothèse d'induction on a  $\langle c; \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'$ .

D'autre part on montre que

$\text{while } b \text{ do } c \equiv \text{if } b \text{ then } c; \text{while } b \text{ do } c \text{ else skip}$  et on conclut en construisant l'arbre :

$$(C_4) \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (B_i) \frac{}{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (C_j) \frac{}{\langle c; \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'} \end{array}}{\langle \text{if } b \text{ then } c; \text{while } b \text{ do } c \text{ else skip}, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma'}$$