

Sémantique opérationnelle : une solution pour l'exercice 10.

1. Les deux règles à rajouter sont :

$$(C_8) \frac{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma' \quad \langle b, \sigma' \rangle \rightsquigarrow \text{true}}{\langle \text{repeat } c \text{ until } b, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}$$

$$(C_9) \frac{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma' \quad \langle b, \sigma' \rangle \rightsquigarrow \text{false} \quad \langle \text{repeat } c \text{ until } b, \sigma' \rangle \rightarrow \sigma''}{\langle \text{repeat } c \text{ until } b, \sigma \rangle \rightarrow \sigma''}$$

2. $\sigma' = (\sigma[z \leftarrow 6])[x \leftarrow 0]$

3. Notons c_1 l'instruction `repeat c until b` et c_2 l'instruction `c; if b then skip else c1`. On peut construire un arbre de preuve de $\langle c_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ à partir d'un arbre de preuve de $\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ et *vice versa*, en examinant les règles possibles pour construire un tel arbre et en distinguant deux cas possibles pour l'évaluation de b . Dans les deux cas, il suffit ensuite de "combiner" des arbres de preuve comme suit :

1. b s'évalue à `true`. A partir de l'arbre :

$$(C_8) \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (C_i) \frac{}{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (B_j) \frac{}{\langle b, \sigma' \rangle \rightsquigarrow \text{true}} \end{array}}{\langle c_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}$$

on peut obtenir l'arbre :

$$(C_3) \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (C_i) \frac{}{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (B_j) \frac{}{\langle b, \sigma' \rangle \rightsquigarrow \text{true}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (C_1) \frac{}{\langle \text{skip}, \sigma' \rangle \rightarrow \sigma'} \end{array}}{\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}$$

et *vice versa*.

2. b s'évalue à `false`. A partir de l'arbre :

$$(C_9) \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (C_i) \frac{}{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (B_j) \frac{}{\langle b, \sigma' \rangle \rightsquigarrow \text{false}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (C_k) \frac{}{\langle c_1, \sigma' \rangle \rightarrow \sigma''} \end{array}}{\langle c_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma''}$$

on peut obtenir l'arbre :

$$(C_3) \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (C_i) \frac{}{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (B_j) \frac{}{\langle b, \sigma' \rangle \rightsquigarrow \text{false}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (C_k) \frac{}{\langle c_1, \sigma' \rangle \rightarrow \sigma''} \end{array}}{\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma''}$$

et *vice versa*.

5. Notons :

- c_1 : while b do c
- c_2 : if b then repeat c until not b else skip
- c_3 : repeat c until b
- c_4 : c ; while not b do c

Par définition, pour montrer que $c_1 \equiv c_2$ et $c_3 \equiv c_4$ il faut établir les quatre implications suivantes :

- (1) $\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma \quad \langle c_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma' \Rightarrow \langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$
- (2) $\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma \quad \langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma' \Rightarrow \langle c_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$
- (3) $\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma \quad \langle c_3, \sigma \rangle \rightarrow \sigma' \Rightarrow \langle c_4, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$
- (4) $\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma \quad \langle c_4, \sigma \rangle \rightarrow \sigma' \Rightarrow \langle c_3, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$

Les preuves de (1) et (3) vont s'obtenir par induction structurelle sur un arbre de dérivation, les implications (2) et (4) se prouveront très facilement en utilisant (1) et (3).

(1). Montrons par induction structurelle que pour tout arbre de dérivation π , $\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma$, si π est un arbre de dérivation de $\langle c_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$, alors il existe un arbre de dérivation de $\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$. Pour les règles C_1 à C_5 , et pour les deux règles C_8 et C_9 , l'hypothèse π est un arbre de dérivation de $\langle c_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ est fausse, ce qui permet de conclure. Il reste donc à envisager les deux règles C_6 et C_7 .

- π a été obtenu en appliquant la règle C_6 .

$$(C_6) \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (B_i) \overline{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{false}} \end{array}}{\langle c_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma}$$

et dans ce cas, il est facile de construire un arbre de dérivation de $\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma$:

$$(C_5) \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (B_i) \overline{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{false}} \end{array} \quad (C_1) \overline{\langle \text{skip}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma}}{\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma}$$

- π a été obtenu en appliquant la règle C_7 .

$$(C_7) \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (B_i) \overline{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (C_j) \overline{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma_1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (C_k) \overline{\langle c_1, \sigma_1 \rangle \rightarrow \sigma'} \end{array}}{\langle c_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}$$

Par hypothèse d'induction, il existe un arbre de dérivation de $\langle c_2, \sigma_1 \rangle \rightarrow \sigma'$ et deux cas se présentent.

1. Soit cet arbre de preuve a été obtenu avec la règle C_4 :

$$(C_4) \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ (B_m) \overline{\langle b, \sigma_1 \rangle \rightsquigarrow \text{true}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ (C_n) \overline{\langle \text{repeat } c \text{ until not } b, \sigma_1 \rangle \rightarrow \sigma'} \end{array}}{\langle c_2, \sigma_1 \rangle \rightarrow \sigma'}$$

et alors on peut conclure puisque l'on peut obtenir l'arbre :

$$(C_4) \frac{(B_i) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}} D}{\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}$$

où D est l'arbre :

$$(C_9) \frac{(C_j) \frac{\vdots}{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma_1} (B_{10}) \frac{(B_m) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma_1 \rangle \rightsquigarrow \text{true}} \langle \text{not } b, \sigma_1 \rangle \rightsquigarrow \text{false}} (C_n) \frac{\vdots}{\langle \text{repeat } c \text{ until not } b, \sigma_1 \rangle \rightarrow \sigma'}}{\langle \text{repeat } c \text{ until not } b, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}$$

2. Soit cet arbre de dérivation a été obtenu avec la règle C_5 :

$$(C_5) \frac{(B_m) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma_1 \rangle \rightsquigarrow \text{false}} (C_1) \frac{\vdots}{\langle \text{skip}, \sigma_1 \rangle \rightarrow \sigma_1}}{\langle c_2, \sigma_1 \rangle \rightarrow \sigma'}$$

et alors on peut conclure puisque l'on peut obtenir l'arbre :

$$(C_4) \frac{(B_i) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}} (C_8) \frac{(C_j) \frac{\vdots}{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma_1} (B_{10}) \frac{(B_m) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma_1 \rangle \rightsquigarrow \text{false}} \langle \text{not } b, \sigma_1 \rangle \rightsquigarrow \text{true}}}{\langle \text{repeat } c \text{ until not } b, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}}{\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}$$

(3). Montrons par induction structurelle que pour tout arbre de dérivation π , $\forall \sigma, \sigma' \in \Sigma$, si π est un arbre de dérivation de $\langle c_3, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$, alors il existe un arbre de dérivation de $\langle c_4, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$. Pour les règles C_1 à C_7 , l'hypothèse π est un arbre de dérivation de $\langle c_3, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ est fausse, ce qui permet de conclure. Il reste donc à envisager les deux règles C_8 et C_9 .

– π a été obtenu en appliquant la règle C_8 .

$$(C_8) \frac{(C_i) \frac{\vdots}{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'} (B_j) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma' \rangle \rightsquigarrow \text{true}}}{\langle c_3, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}$$

et dans ce cas on construit facilement un arbre de dérivation de $\langle c_4, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$:

$$(C_3) \frac{(C_i) \frac{\vdots}{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'} (C_6) \frac{(B_{10}) \frac{(B_j) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma' \rangle \rightsquigarrow \text{true}} \langle \text{not } b, \sigma' \rangle \rightsquigarrow \text{false}}}{\langle \text{while not } b \text{ do } c, \sigma' \rangle \rightarrow \sigma'}}{\langle c_4, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}$$

– π a été obtenu en appliquant la règle C_9 .

$$(C_9) \frac{\frac{(C_i) \frac{\vdots}{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma''} \quad (B_j) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma'' \rangle \rightsquigarrow \text{false}} \quad (C_k) \frac{\vdots}{\langle c_3, \sigma'' \rangle \rightarrow \sigma'}}{\langle c_3, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}}{\langle c_3, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}$$

Par hypothèse d'induction, il existe un arbre de dérivation D de $\langle c_4, \sigma'' \rangle \rightarrow \sigma'$ et on peut alors construire l'arbre de dérivation de $\langle c_4, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ comme suit :

$$(C_3) \frac{\frac{(C_i) \frac{\vdots}{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma''} \quad (B_{10}) \frac{\frac{(B_j) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma'' \rangle \rightsquigarrow \text{false}}}{\langle \text{not } b, \sigma'' \rangle \rightarrow \text{true}}}{\langle \text{not } b, \sigma'' \rangle \rightarrow \text{true}} \quad D}{\langle c_4, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}}{\langle c_4, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}$$

(2). Montrons comment à partir d'un arbre de dérivation de $\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$, on peut obtenir un arbre de dérivation de $\langle c_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$. Deux cas se présentent.

– L'arbre de dérivation de $\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ a été obtenu en appliquant la règle C_4 .

$$(C_4) \frac{\frac{(B_i) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}} \quad (C_j) \frac{\vdots}{\langle \text{repeat } c \text{ until not } b, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}}{\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}}{\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}$$

et donc il existe un arbre de dérivation de $\langle \text{repeat } c \text{ until not } b, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$. D'après (3)., il existe donc un arbre de dérivation de $\langle c; \text{while not not } b \text{ do } c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ qui a la forme suivante :

$$(C_3) \frac{\frac{(C_k) \frac{\vdots}{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma''} \quad D}{\langle c; \text{while not not } b \text{ do } c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}}{\langle c; \text{while not not } b \text{ do } c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}$$

où D est un arbre de dérivation de $\langle \text{while not not } b \text{ do } c, \sigma'' \rangle \rightarrow \sigma'$. D'après la question précédente, il existe donc un arbre de dérivation D' de $\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma'' \rangle \rightarrow \sigma'$ et on peut alors conclure puisque l'on peut construire l'arbre de dérivation :

$$(C_7) \frac{\frac{(B_i) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{true}} \quad (C_k) \frac{\vdots}{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma''} \quad D'}{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}}{\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}$$

– L'arbre de dérivation de $\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'$ a été obtenu en appliquant la règle C_5 .

$$(C_5) \frac{\frac{(B_i) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{false}} \quad (C_1) \frac{\vdots}{\langle \text{skip}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma}}{\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma}}{\langle c_2, \sigma \rangle \rightarrow \sigma}$$

et on peut alors conclure puisque l'on peut construire l'arbre de dérivation :

$$(C_6) \frac{\frac{(B_i) \frac{\vdots}{\langle b, \sigma \rangle \rightsquigarrow \text{false}}}{\langle c_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma}}{\langle c_1, \sigma \rangle \rightarrow \sigma}$$

(4). Démonstration similaire à (2).