Sémantique opérationnelle d'évaluation à petits pas (1)

Rendre compte des étapes qui ont conduit au résultat d'un calcul de manière "plus fine" que la sémantique à grands pas.

Relation $\hookrightarrow$ de transition entre configurations $\langle e, \sigma \rangle$: $\langle e, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle e', \sigma \rangle$ est un jugement exprimant le fait que l'évaluation d'une expression e à partir d'une valuation σ conduit à évaluer une expression e' "plus simple" à partir de la même valuation.

Exemples

$$\langle 3 + (2 \times 8), \sigma \rangle \hookrightarrow \langle 3 + 16, \sigma \rangle$$

$$\langle 2/0, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle \mathsf{Err}, \sigma \rangle$$

Configuration : paire $\langle e, \sigma \rangle$ où $e \in E_A^+$ et $\sigma \in \mathcal{V}[\mathbb{Z}]$

E_A^+ : ensemble défini inductivement à partir des règles définissant E_A et de la règle :

$$(R_{\mathsf{Err}})\,\frac{}{\mathsf{Err}}$$

Configuration terminale : $\langle v, \sigma \rangle$ où $v \in \mathbb{Z} \cup \{\mathsf{Err}\}$

Sémantique opérationnelle d'évaluation à petits pas (2)

Séquence de calcul : $\langle e_0, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_1, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \cdots$ telle que $\forall i \geq 0$, $\langle e_i, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_{i+1}, \sigma\rangle$ admette un arbre d'inférence à partir des règles définissant $\hookrightarrow$.

$\langle e, \sigma\rangle \overset{\star}{\hookrightarrow} \langle e', \sigma\rangle$ ssi il existe une séquence de calcul de longueur finie $\langle e_0, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_1, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \langle e_k, \sigma\rangle$ avec $e = e_0$ et $e' = e_k$.

$\langle e, \sigma\rangle \overset{k}{\hookrightarrow} \langle e', \sigma\rangle$ ssi il existe une séquence de calcul de longueur k $\langle e_0, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_1, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \langle e_k, \sigma\rangle$ avec $e = e_0$ et $e' = e_k$.

De plus, si $e_k = v \in \mathbb{V}$ (configuration terminale), alors $\langle e, \sigma\rangle \overset{\star}{\hookrightarrow} v$.

Sémantique opérationnelle d'évaluation à petits pas (3)

Obtention d'une configuration terminale

$$(AS_1)\ \frac{}{\langle x, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \sigma(x), \sigma\rangle}(\text{si } x \in V)$$

$$(AS_2)\ \frac{}{\langle \mathsf{Err}\ \mathsf{op}_2\ e, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \mathsf{Err}, \sigma\rangle}(\text{si } \ \mathsf{op}_2 \in \{+, -, \times, /\})$$

$$(AS_3)\ \frac{}{\langle n\ \mathsf{op}_2\ \mathsf{Err}, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \mathsf{Err}, \sigma\rangle}(\text{si } \ \mathsf{op}_2 \in \{+, -, \times, /\} \text{ et } n \in \mathbb{Z})$$

$$(AS_4)\ \frac{}{\langle n_1\ \mathsf{op}_2\ n_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle n, \sigma\rangle}\left(\begin{array}{l} \text{si } n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \text{ et } \ \mathsf{op}_2 \in \{+, -, \times\} \\ \text{et } n = n_1\ \mathsf{op}_2\ n_2 \end{array}\right)$$

$$(AS_5)\ \frac{}{\langle n_1/n_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle n, \sigma\rangle}(\text{si } n_1 \in \mathbb{Z} \text{ et } n_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \text{ et } n = n_1/n_2)$$

$$(AS_6)\ \frac{}{\langle n_1/n_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \mathsf{Err}, \sigma\rangle}(\text{si } n_1 \in \mathbb{Z} \text{ et } n_2 = 0)$$

Sémantique opérationnelle d'évaluation à petits pas (4)

Evaluation "de gauche à droite"

$$(AS_7)\,\frac{\langle e_1,\sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_1',\sigma\rangle}{\langle e_1\ \mathsf{op}_2\ e_2,\sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_1'\ \mathsf{op}_2\ e_2,\sigma\rangle}\ (\text{si}\ \ \mathsf{op}_2 \in \{+,-,\times,/\})$$

$$(AS_8)\,\frac{\langle e_2,\sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_2',\sigma\rangle}{\langle n_1\ \mathsf{op}_2\ e_2,\sigma\rangle \hookrightarrow \langle n_1\ \mathsf{op}_2\ e_2',\sigma\rangle}\left(\begin{array}{c}\text{si}\ n_1 \in \mathbb{Z} \\ \text{et}\ \ \mathsf{op}_2 \in \{+,-,\times,/\}\end{array}\right)$$

Sémantique opérationnelle d'évaluation à petits pas : Exemple

σ : valuation telle que $\sigma(x) = 1$, $\sigma(y) = 3$ et $\sigma(z) = 2$

Séquence de calcul qui permet de décrire l'évaluation de l'expression

$$
\begin{array}{ll}
 & \langle (z + (x - y)) \times (x + 7), \sigma \rangle \\
\hookrightarrow & \langle (2 + (x - y)) \times (x + 7), \sigma \rangle \\
\hookrightarrow & \langle (2 + (1 - y)) \times (x + 7), \sigma \rangle \\
\hookrightarrow & \langle (2 + (1 - 3)) \times (x + 7), \sigma \rangle \\
\hookrightarrow & \langle (2 + -2) \times (x + 7), \sigma \rangle \\
\hookrightarrow & \langle 0 \times (x + 7), \sigma \rangle \\
\hookrightarrow & \langle 0 \times (1 + 7), \sigma \rangle \\
\hookrightarrow & \langle 0 \times 8, \sigma \rangle \\
\hookrightarrow & \langle 0, \sigma \rangle
\end{array}
$$

Terminaison (1)

Proposition Toutes les séquences de calcul décrivant l'évaluation d'une expression arithmétique sont finies.

IDÉE DE LA PREUVE : A chaque étape de calcul, on obtient une expression "plus simple" ... on obtient donc une configuration terminale en temps fini.

- définir formellement la relation d'ordre "est une expression plus simple"
  ordre lexicographique
- montrer qu'il n'existe pas de suites infinies strictement décroissantes pour la relation d'ordre "est une expression plus simple"
  ordre bien fondé
- montrer que chaque étape de calcul conduit à une expression "plus simple"
  induction sur un arbre d'inférence

Terminaison (2)

Définition de la relation "est une expression plus simple".

A chaque étape de calcul, soit le nombre de variables diminue strictement, soit le nombre d'opérateurs diminue strictement.

$e \in E_A^+$: expression

- $\mathcal{N}_V(e) \in \mathbb{N}$: nombre d'occurrences de variables dans e
- $\mathcal{N}_O(e) \in \mathbb{N}$: nombre d'opérateurs apparaissant dans e

Comment définir une relation d'ordre pour laquelle il n'existe pas de suites infinies strictement décroissantes à partir de $\mathcal{N}_V(e) \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{N}_O(e) \in \mathbb{N}$?

... ordre lexicographique sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ obtenu à partir de l'ordre bien fondé $\leq$ sur $\mathbb{N}$

Ordres

Une *relation de préordre* $\mathcal{R}$ sur $E \times E$ est une relation :

- *réflexive* $\forall x \in E \quad x \,\mathcal{R}\, x$
- *transitive* $\forall x, y, z \in E$, si $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, z$, alors $x \,\mathcal{R}\, z$

Une *relation d'ordre* $\mathcal{R}$ sur $E \times E$ est un préordre :

- *antisymétrique* $\forall x, y \in E$, si $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, x$, alors $x = y$

Exemple : $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Une relation d'ordre $\preceq$ sur $E \times E$ est *totale* si deux éléments quelconques de E sont en relation par cet ordre : $\forall e_1, e_2 \in E \quad e_1 \preceq e_2$ ou $e_2 \preceq e_1$
Sinon l'ordre est dit *partiel*.

Exemple : $\subseteq$ est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble $\wp(E)$ des parties d'un ensemble E.

Ordre strict $\prec$ associé à $\preceq$: $x \prec y$ ssi $x \preceq y$ et $x \neq y$.

... un ordre strict n'est pas une relation d'ordre ! (réflexivité)

Ordres bien fondés (1)

Une relation d'ordre $\preceq$ sur un ensemble E est *bien fondée* s'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante $e_1 \succ e_2 \succ \cdots$ d'éléments de E.

Exemple : $\leq$ est un ordre bien fondé sur $\mathbb{N}$ tandis que ce n'est pas un ordre bien fondé sur $\mathbb{Z}$

Théorème Un ordre, défini sur E, est bien fondé si et seulement si toute partie non vide de E admet un élément minimal (pour cet ordre).

Un *élément minimal* d'une partie X de E est un élément de X tel qu'il n'existe pas, dans X, un élément plus petit que lui.

Remarque : Tout ordre sur un ensemble fini est bien fondé.

Ordres bien fondés (2)

PREUVE

($\Rightarrow$). Soit X une partie non vide de E. Si X n'admet pas d'élément minimal, alors :

$$\forall x \in X \ \ \exists y \in X \ \ y \prec x$$

Puisque X n'est pas vide, on peut choisir un élément $x_0 \in X$ et il existe donc un élément $x_1 \in X$ tel que $x_1 \prec x_0$. On peut alors construire "de proche en proche" une suite infinie décroissante ce qui contredit l'hypothèse de bonne fondation de l'ordre.
($\Leftarrow$). Si toute partie non vide de E admet un élément minimal, alors c'est en particulier le cas pour une suite strictement décroissante. Soit p l'indice de cet élément minimal. Tous les éléments d'indice supérieur à p lui sont supérieurs et, puisque la suite est strictement décroissante, p est le plus grand indice de la suite qui est donc finie.

Récurrence bien fondée

Théorème Si E est muni d'un ordre bien fondé $\preceq$ et P est une propriété sur E alors

$$\text{si } (\forall x \in E \ (\text{si } (\forall y \prec x \ P(y)) \text{ alors } P(x))) \quad \text{alors} \quad \forall x \in E \ P(x)$$

Preuve Soit $X = \{x \in E \mid \neg P(x)\}$. Si X est non vide alors, d'après le théorème précédent, X admet un élément minimal x_0 qui vérifie donc $\forall y \prec x_0,\ y \notin X$ et donc $P(y)$ est vrai. En utilisant l'hypothèse on en déduit que $P(x_0)$ est vrai ce qui contredit $x_0 \in X$. Donc X est vide ce qui signifie que $\forall x \in E \ P(x)$.

Ordre lexicographique (1)

Définir un ordre lexicographique, c'est définir une relation d'ordre sur un produit cartésien d'ensembles à partir des relations d'ordre définies sur chacun des ensembles invoqués dans le produit cartésien.

Exemple : l'ordre alphabétique sur les mots est un ordre lexicographique obtenu à partir de l'ordre qui existe sur les lettres de l'alphabet.

Soit E_i, pour $1 \leq i \leq n$, un ensemble ordonné par $\preceq_i$. *Ordre lexicographique* $\preceq$ sur le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ défini par :

$$(e_1, ..., e_n) \preceq (f_1, ..., f_n) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} (e_1, e_2, ..., e_n) = (f_1, f_2, ..., f_n) \\ \vee(\exists m > 0 \ \forall i < m \ e_i = f_i \wedge e_m \prec_m f_m) \end{array} \right)$$

Exemple : Ordre lexicographique sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(n_1, n_2) \preceq (n'_1, n'_2)$ ssi $(n_1 \leq n'_1)$ ou $(n_1 = n'_1$ et $n_2 \leq n'_2)$

Théorème Si $\preceq_i$ est un ordre bien fondé sur E_i, pour $1 \leq i \leq n$, alors l'ordre lexicographique $\preceq$ sur le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est bien fondé.

Ordre lexicographique (2)

PREUVE Soit X une partie non vide de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$. Montrons tout d'abord par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que si $1 \leq k \leq n$, alors :

$$X_k = \left\{ \begin{array}{ll} x_k \in E_k \mid & \exists (m_1, m_2, \cdots, m_{k-1}, x_k, \cdots, x_n) \in X \\ & \text{tel que } \forall (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \in X \ m_i \preceq_i x'_i \ (1 \leq i \leq k-1) \end{array} \right\}$$

n'est pas vide.

Pour $n = 1$, on a $X_1 = \{x_1 \in E_1 \mid \exists (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X\} \neq \emptyset$. Puisque $\preceq_1$ est un ordre bien fondé sur E_1, X_1 admet un élément minimal $m_1 \in X_1$. Supposons à présent que pour un entier $i < n$, X_i soit non vide. X_i admet un élément minimal $m_i \in X_i$ et donc l'ensemble X_{i+1} n'est pas vide.

Chacun des ensembles X_j (pour $1 \leq j \leq n$) n'est donc pas vide et admet un élément minimal m_j. Par construction, on a alors $(m_1, m_2, \cdots, m_n) \in X$ qui est un élément minimal de X pour l'ordre lexicographique sur $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$. On peut alors conclure que cet ordre lexicographique est bien fondé.

Ordre lexicographique (3)

Remarque : Ce théorème ne s'étend pas à $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$. En effet, le fait que le produit cartésien porte sur un nombre fini d'ensembles est important.

Exemple.

On considère un alphabet $A = \{a, b\}$ et une relation d'ordre $\preceq$ sur A définie par $a \preceq b$.

A étant fini, $\preceq$ est un ordre bien fondé sur A.

... mais l'ordre lexicographique sur $A^\star$ (ensemble des suites de longueurs finies d'éléments de A) n'est pas un ordre bien fondé : $(a^n b)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite infinie strictement décroissante d'éléments de $A^\star$!

Terminaison (3)

$e \in E_A^+$: expression

- $\mathcal{N}_V(e) \in \mathbb{N}$: nombre d'occurrences de variables dans e
- $\mathcal{N}_O(e) \in \mathbb{N}$: nombre d'opérateurs apparaissant dans e

Ordre lexicographique $\preceq$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(n_1, n_2) \preceq (n_1', n_2') \text{ ssi } (n_1 \leq n_1') \text{ ou } (n_1 = n_1' \text{ et } n_2 \leq n_2')$$

Puisque $\leq$ est un ordre bien fondé sur $\mathbb{N}$, d'après le théorème précédent $\preceq$ est aussi un ordre bien fondé sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

En utilisant le schéma d'induction associé au système d'inférence définissant la relation $\hookrightarrow$, nous allons montrer une propriété P exprimant que si $\langle e, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle e', \sigma \rangle$, alors $(\mathcal{N}_V(e'), \mathcal{N}_O(e')) \prec (\mathcal{N}_V(e), \mathcal{N}_O(e))$ où $\prec$ est l'ordre strict associé à $\preceq$.

$\preceq$ étant bien fondé, toute séquence de calcul correspondant à l'évaluation d'une expression arithmétique est donc finie.

Terminaison (4)

Propriété P : $\langle e, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e', \sigma\rangle \Rightarrow (\mathcal{N}_V(e'), \mathcal{N}_O(e')) \prec (\mathcal{N}_V(e), \mathcal{N}_O(e))$

Preuve Induction sur l'arbre d'inférence du jugement $\langle e, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e', \sigma\rangle$.

$\forall x \in V \;\; P(\langle x, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \sigma(x), \sigma\rangle)$ $\qquad (AS_1)\dfrac{}{\langle x, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \sigma(x), \sigma\rangle}$

$\sigma(x) \in \mathbb{Z}$ et on a donc $\mathcal{N}_V(x) = 1$ et $\mathcal{N}_V(\sigma(x)) = 0$ ce qui permet de conclure.

$\forall e \in E_A \;\; P(\langle \mathsf{Err}\ \mathsf{op}_2\ e, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \mathsf{Err}, \sigma\rangle)$ $\qquad (AS_2)\dfrac{}{\langle \mathsf{Err}\ \mathsf{op}_2\ e, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \mathsf{Err}, \sigma\rangle}$

On a $\mathcal{N}_V(\mathsf{Err}\ \mathsf{op}_2\ e) \geq \mathcal{N}_V(\mathsf{Err})$ et $\mathcal{N}_O(\mathsf{Err}\ \mathsf{op}_2\ e) > \mathcal{N}_O(\mathsf{Err})$ ce qui permet de conclure.

$\forall n \in \mathbb{Z} \;\; P(\langle n\ \mathsf{op}_2\ \mathsf{Err}, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \mathsf{Err}, \sigma\rangle)$ $\qquad (AS_3)\dfrac{}{\langle n\ \mathsf{op}_2\ \mathsf{Err}, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \mathsf{Err}, \sigma\rangle}$

On a $\mathcal{N}_V(n\ \mathsf{op}_2\ \mathsf{Err}) \geq \mathcal{N}_V(\mathsf{Err})$ et $\mathcal{N}_O(n\ \mathsf{op}_2\ \mathsf{Err}) > \mathcal{N}_O(\mathsf{Err})$ ce qui permet de conclure.

Terminaison (5)

$$(AS_4)\,\frac{}{\langle n_1 \ \mathsf{op}_2 \ n_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle n, \sigma\rangle}$$

$\forall n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\ (n = n_1 \ \mathsf{op}_2 \ n_2 \Rightarrow P(\langle n_1 \ \mathsf{op}_2 \ n_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle n, \sigma\rangle))$

On a $\mathcal{N}_V(n) = \mathcal{N}_V(n_1 + n_2)$ et $\mathcal{N}_O(n) = \mathcal{N}_O(n_1 + n_2) - 1$ ce qui permet de conclure.

$$(AS_5)\,\frac{}{\langle n_1/n_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle n, \sigma\rangle}$$

$\forall n, n_1 \in \mathbb{Z}\ \ \forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\ (n = n_1/n_2 \Rightarrow P(\langle n_1/n_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle n, \sigma\rangle))$

On a $\mathcal{N}_V(n) = \mathcal{N}_V(n_1/n_2)$ et $\mathcal{N}_O(n) = \mathcal{N}_O(n_1/n_2) - 1$ ce qui permet de conclure.

$$(AS_6)\,\frac{}{\langle n_1/n_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \mathsf{Err}, \sigma\rangle}$$

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\ (n_2 = 0 \Rightarrow P(\langle n_1/n_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \mathsf{Err}, \sigma\rangle))$

On a $\mathcal{N}_V(n_1/n_2) = \mathcal{N}_V(\mathsf{Err})$ et $\mathcal{N}_O(n_1/n_2) > \mathcal{N}_O(\mathsf{Err})$ ce qui permet de conclure.

Terminaison (6)

$$(AS_7)\,\frac{\langle e_1,\sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_1',\sigma\rangle}{\langle e_1\ \mathsf{op}_2\ e_2,\sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_1'\ \mathsf{op}_2\ e_2,\sigma\rangle}$$

$\forall e_1, e_1', e_2 \in\ E_A$

$(P(\langle e_1,\sigma\rangle \hookrightarrow\ \langle e_1',\sigma\rangle)\ \Rightarrow\ P(\langle e_1\ \mathsf{op}_2\ e_2,\sigma\rangle \hookrightarrow\ \langle e_1'\ \mathsf{op}_2\ e_2,\sigma\rangle))$

Par hypothèse d'induction, on a $(\mathcal{N}_V(e_1'),\mathcal{N}_O(e_1')) \prec (\mathcal{N}_V(e_1),\mathcal{N}_O(e_1))$. Aussi, soit $\mathcal{N}_V(e_1') < \mathcal{N}_V(e_1)$ et il vient :

$$\mathcal{N}_V(e_1'\ \mathsf{op}_2\ e_2) = \mathcal{N}_V(e_1') + \mathcal{N}_V(e_2) < \mathcal{N}_V(e_1) + \mathcal{N}_V(e_2) = \mathcal{N}_V(e_1\ \mathsf{op}_2\ e_2)$$

et on peut conclure, soit $\mathcal{N}_V(e_1') = \mathcal{N}_V(e_1)$ et $\mathcal{N}_O(e_1') < \mathcal{N}_O(e_1)$ et il vient :

$$\mathcal{N}_V(e_1'\ \mathsf{op}_2\ e_2) = \mathcal{N}_V(e_1') + \mathcal{N}_V(e_2) = \mathcal{N}_V(e_1) + \mathcal{N}_V(e_2) = \mathcal{N}_V(e_1\ \mathsf{op}_2\ e_2)$$

$$\mathcal{N}_O(e_1'\ \mathsf{op}_2\ e_2) = \mathcal{N}_O(e_1') + \mathcal{N}_O(e_2) + 1 < \mathcal{N}_O(e_1) + \mathcal{N}_O(e_2) + 1 = \mathcal{N}_O(e_1\ \mathsf{op}_2\ e_2)$$

ce qui permet encore de conclure.

Terminaison (7)

$$(AS_8)\,\frac{\langle e_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_2', \sigma\rangle}{\langle n_1 \text{ op}_2\ e_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle n_1 \text{ op}_2\ e_2', \sigma\rangle}$$

$\forall n_1 \in \mathbb{Z}\ \forall e_2, e_2' \in E_A$
$(P(\langle e_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_2', \sigma\rangle) \Rightarrow P(\langle n_1 \text{ op}_2\ e_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle n_1 \text{ op}_2\ e_2', \sigma\rangle))$

Par hypothèse d'induction, on a $(\mathcal{N}_V(e_2'), \mathcal{N}_O(e_2')) \prec (\mathcal{N}_V(e_2), \mathcal{N}_O(e_2))$.
Aussi, soit $\mathcal{N}_V(e_2') < \mathcal{N}_V(e_2)$ et il vient :

$$\mathcal{N}_V(n_1 \text{ op}_2\ e_2') = \mathcal{N}_V(e_2') < \mathcal{N}_V(e_2) = \mathcal{N}_V(n_1 \text{ op}_2\ e_2)$$

et on peut conclure, soit $\mathcal{N}_V(e_2') = \mathcal{N}_V(e_2)$ et $\mathcal{N}_O(e_2') < \mathcal{N}_O(e_2)$ et il vient :

$$\mathcal{N}_V(n_1 \text{ op}_2\ e_2') = \mathcal{N}_V(e_2') = \mathcal{N}_V(e_2) = \mathcal{N}_V(n_1 \text{ op}_2\ e_2)$$
$$\mathcal{N}_O(n_1 \text{ op}_2\ e_2') = \mathcal{N}_O(e_2') + 1 < \mathcal{N}_O(e_2) + 1 = \mathcal{N}_O(n_1 \text{ op}_2\ e_2)$$

ce qui permet encore de conclure.

Equivalence sémantique (1)

Proposition $\forall e \in E_A \; \forall \sigma \in \mathcal{V}[\mathbb{Z}] \; \forall v \in \mathbb{V} \; \langle e, \sigma \rangle \rightsquigarrow v \Rightarrow \langle e, \sigma \rangle \xhookrightarrow{\star} v$

Preuve Induction sur e.

- si $e = n \in \mathbb{Z}$, alors l'arbre de dérivation de $\langle e, \sigma \rangle \rightsquigarrow v$ est :

$$(A_1)\frac{}{\langle n, \sigma \rangle \rightsquigarrow n} \qquad (n = v)$$

On a alors clairement $\langle n, \sigma \rangle \xhookrightarrow{*} n$ (configuration terminale).

- si $e = x \in V$, alors l'arbre de dérivation de $\langle e, \sigma \rangle \rightsquigarrow v$ est :

$$(A_2)\frac{}{\langle x, \sigma \rangle \rightsquigarrow \sigma(x)} \qquad (\sigma(x) = v)$$

Dans ce cas, la règle AS_1 permet de construire un arbre de dérivation pour $\langle x, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle \sigma(x), \sigma \rangle$ et on a donc $\langle x, \sigma \rangle \xhookrightarrow{*} v$.

- si $e = a_1 \; \mathsf{op}_2 \; a_2$ avec $\mathsf{op}_2 \in \{+, -, \times\}$, alors trois cas se présentent.

Equivalence sémantique (2)

Cas 1. $\langle a_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}$ L'arbre de dérivation de $\langle e, \sigma\rangle \rightsquigarrow n$ est :

$$(A_3)\,\dfrac{(A_i)\,\dfrac{\vdots}{\langle a_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}}{\langle a_1\ \mathsf{op}_2\ a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}$$

Par hypothèse d'induction, on a $\langle a_1, \sigma\rangle \overset{*}{\hookrightarrow} \mathsf{Err}$ et il existe donc une séquence de calcul :

$$\langle a_1, \sigma\rangle = \langle a_1^0, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_1^1, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_1^2, \sigma\rangle \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \langle a_1^{k_1}, \sigma\rangle = \langle \mathsf{Err}, \sigma\rangle$$

à partir de laquelle, en appliquant la règle AS_7, on peut construire :

$$\begin{array}{rl} & \langle a_1\ \mathsf{op}_2\ a_2, \sigma\rangle = \langle a_1^0\ \mathsf{op}_2\ a_2, \sigma\rangle \\ \hookrightarrow & \langle a_1^1\ \mathsf{op}_2\ a_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_1^2\ \mathsf{op}_2\ a_2, \sigma\rangle \\ \hookrightarrow & \ldots \\ \hookrightarrow & \langle a_1^{k_1}\ \mathsf{op}_2\ a_2, \sigma\rangle = \langle \mathsf{Err}\ \mathsf{op}_2\ a_2, \sigma\rangle \end{array}$$

et la règle AS_2 permet alors de conclure.

Equivalence sémantique (3)

Cas 2. $\langle a_2, \sigma\rangle \leadsto \mathsf{Err}$ L'arbre de dérivation de $\langle e, \sigma\rangle \leadsto v$ est :

$$(A_4)\dfrac{(A_j)\dfrac{\vdots}{\langle a_1, \sigma\rangle \leadsto v_1} \quad (A_i)\dfrac{\vdots}{\langle a_2, \sigma\rangle \leadsto \mathsf{Err}}}{\langle a_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle \leadsto \mathsf{Err}}$$

Par hypothèse d'induction on a $\langle a_2, \sigma\rangle \overset{*}{\hookrightarrow} \mathsf{Err}$ et il existe donc une séquence de calcul :

$$\langle a_2, \sigma\rangle = \langle a_2^0, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_2^1, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_2^2, \sigma\rangle \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \langle a_2^{k_2}, \sigma\rangle = \langle \mathsf{Err}, \sigma\rangle \qquad (1)$$

D'autre part, $v_1 \in \mathbb{Z}$ et, par hypothèse d'induction, on a $\langle a_1, \sigma\rangle \overset{*}{\hookrightarrow} v_1$. Il existe donc une séquence de calcul :

$$\langle a_1, \sigma\rangle = \langle a_1^0, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_1^1, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_1^2, \sigma\rangle \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \langle a_1^{k_1}, \sigma\rangle = \langle v_1, \sigma\rangle \qquad (2)$$

Equivalence sémantique (4)

A partir de (2), en appliquant la règle AS_7, on obtient :

$$\begin{aligned} & \langle a_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle = \langle a_1^0 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle \\ \hookrightarrow \quad & \langle a_1^1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_1^2 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \cdots \\ \hookrightarrow \quad & \langle a_1^{k_1} \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle = \langle v_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle \end{aligned} \tag{3}$$

La règle AS_8 permet de transformer chacune des transitions $\langle a_2^i, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_2^{i+1}, \sigma\rangle$ de la séquence (1) en une transition $\langle v_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2^i, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle v_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2^{i+1}, \sigma\rangle$. On obtient alors la séquence :

$$\begin{aligned} & \langle v_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle = \langle v_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2^0, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle v_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2^1, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle v_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2^2, \sigma\rangle \hookrightarrow \cdots \\ & \cdots \hookrightarrow \langle v_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2^{k_2}, \sigma\rangle = \langle v_1 \ \mathsf{op}_2 \ \mathsf{Err}, \sigma\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

Enfin, la règle AS_3 nous permet de considérer la transition $\langle v_1 \ \mathsf{op}_2 \ \mathsf{Err}, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \mathsf{Err}, \sigma\rangle$, et en concaténant les séquences (3) et (4) avec cette transition on obtient finalement $\langle a_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle \overset{*}{\hookrightarrow} \mathsf{Err}$ ce qui permet de conclure.

Equivalence sémantique (5)

Cas 3. $\langle a_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_1$ et $\langle a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_2$ $(n_1, n_2 \in \mathbb{Z})$
L'arbre de dérivation de $\langle e, \sigma\rangle \rightsquigarrow v$ est :

$$(A_k)\dfrac{(A_i)\dfrac{\vdots}{\langle a_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_1} \quad (A_j)\dfrac{\vdots}{\langle a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_2}}{\langle a_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_1 \ \mathsf{op}_2 \ n_2} \qquad (k \in \{4,5,6\})$$

Par hypothèse d'induction on a $\langle a_1, \sigma\rangle \overset{*}{\hookrightarrow} n_1$ et $\langle a_2, \sigma\rangle \overset{*}{\hookrightarrow} n_2$ et il existe donc 2 séquences de calcul :

$$\langle a_1, \sigma\rangle = \langle a_1^0, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_1^1, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_1^2, \sigma\rangle \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \langle a_1^{k_1}, \sigma\rangle = \langle n_1, \sigma\rangle \qquad (5)$$

$$\langle a_2, \sigma\rangle = \langle a_2^0, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_2^1, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_2^2, \sigma\rangle \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \langle a_2^{k_2}, \sigma\rangle = \langle n_2, \sigma\rangle \qquad (6)$$

La règle AS_7 permet de transformer chaque $\langle a_1^i, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_1^{i+1}, \sigma\rangle$ de (5) en $\langle a_1^i \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_1^{i+1} \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}&\langle a_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle = \langle a_1^0 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_1^1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_1^2 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \cdots \\ &\cdots \hookrightarrow \langle a_1^{k_1} \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle = \langle n_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle\end{aligned} \qquad (7)$$

Equivalence sémantique (6)

La règle AS_8 permet de transformer chaque $\langle a_2^i, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle a_2^{i+1}, \sigma\rangle$ de (6) en $\langle n_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2^i, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle n_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2^{i+1}, \sigma\rangle$. On obtient alors :

$$\begin{array}{l}\langle n_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle = \langle n_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2^0, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle n_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2^1, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle n_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2^2, \sigma\rangle \hookrightarrow \cdots \\ \cdots \hookrightarrow \langle n_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2^{k_2}, \sigma\rangle = \langle n_1 \ \mathsf{op}_2 \ n_2, \sigma\rangle\end{array} \tag{8}$$

Enfin, la règle AS_4 permet d'obtenir la transition $\langle n_1 \ \mathsf{op}_2 \ n_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle n, \sigma\rangle$ où n est la valeur de $n_1 \ \mathsf{op}_2 \ n_2$, et en concaténant les séquences (7) et (8) avec cette transition on obtient finalement $\langle a_1 \ \mathsf{op}_2 \ a_2, \sigma\rangle \stackrel{*}{\hookrightarrow} n_1 \ \mathsf{op}_2 \ n_2$.

- Si $e = a_1/a_2$, alors le raisonnement est similaire au cas précédent. Il suffit de considérer le cas supplémentaire où $\langle a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow 0$.

Equivalence sémantique (7)

Pour montrer $\forall e \in E_A\ \forall \sigma \in \mathcal{V}[\mathbb{Z}]\ \forall v \in \mathbb{V}\ \langle e, \sigma\rangle \overset{\star}{\hookrightarrow} v \Rightarrow \langle e, \sigma\rangle \rightsquigarrow v$, on montre tout d'abord :

Lemme $\forall e_1, e_2 \in E_A\ \forall \sigma \in \mathcal{V}[\mathbb{Z}]\ \forall v \in \mathbb{V}$, si $\langle e_1, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_2, \sigma\rangle$ et $\langle e_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow v$, alors $\langle e_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow v$..

Preuve Induction sur e_1.

- $e_1 = n \in \mathbb{Z}$. Impossible car $\langle e_1, \sigma\rangle$ serait une configuration terminale.
- $e_1 = x \in V$. On a forcément $e_2 = \sigma(x) \in \mathbb{Z}$ et $v = \sigma(x)$. On peut conclure en construisant l'arbre :

$$(A_2)\,\frac{}{\langle x, \sigma\rangle \rightsquigarrow v}$$

- $e_1 = a_1\ \mathsf{op}_2\ a_2$. On distingue 3 cas.

Equivalence sémantique (8)

(1). $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ (avec $a_2 \neq 0 \vee \mathsf{op}_2 \;\neq /$ puisque sinon e_2 vaudrait Err ce qui est impossible puisque $e_2 \in E_A$). On a alors $e_2 = \langle v, \sigma \rangle$ avec $v = a_1 \;\mathsf{op}_2\; a_2 \in \mathbb{Z}$ et on peut conclure en construisant l'arbre :

$$(A_j)\dfrac{(A_1)\dfrac{}{\langle a_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow a_1} \quad (A_1)\dfrac{}{\langle a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow a_2}}{\langle a_1 \;\mathsf{op}_2\; a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow v} \quad j \in \{5, 6, 7, 9\}$$

(2). $a_1 \in E_A \backslash \mathbb{Z}$ et il vient $e_2 = a_1' \;\mathsf{op}_2\; a_2$ avec $\langle a_1, \sigma \rangle \hookrightarrow \langle a_1', \sigma \rangle$. L'arbre d'inférence de $\langle a_1' \;\mathsf{op}_2\; a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow v$ contient forcément le sous-arbre :

$$(A_j)\dfrac{}{\langle a_1', \sigma \rangle \rightsquigarrow v_1'}$$

et donc par hypothèse d'induction, il vient $\langle a_1, \sigma \rangle \rightsquigarrow v_1'$ et à partir de l'arbre d'inférence de $\langle a_1' \;\mathsf{op}_2\; a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow v$ on peut obtenir facilement $\langle a_1 \;\mathsf{op}_2\; a_2, \sigma \rangle \rightsquigarrow v$

(3). $a_1 \in \mathbb{Z}$ et $a_2 \in E_A \backslash \mathbb{Z}$ Raisonnement similaire au cas précédent.

Equivalence sémantique (9)

Proposition $\forall e \in E_A\ \forall \sigma \in \mathcal{V}[\mathbb{Z}]\ \forall v \in \mathbb{V}\ \langle e, \sigma\rangle \overset{\star}{\hookrightarrow} v \Rightarrow \langle e, \sigma\rangle \rightsquigarrow v$

Preuve

Puisque $\langle e, \sigma\rangle \overset{\star}{\hookrightarrow} v$, il existe une séquence :

$$\langle e, \sigma\rangle = \langle e^0, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e^1, \sigma\rangle \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \langle e^k, \sigma\rangle$$

avec $e^k = v \in \mathbb{V}$. La preuve s'obtient par induction sur la longueur k de cette séquence.

Si $k = 0$, alors $e = v \in E_A \cap \mathbb{V} = \mathbb{Z}$ et la règle A_1 permet de conclure.

Si $k = k_0 + 1$, alors on procède par cas sur la première transition de la séquence.

Equivalence sémantique (10)

- $\langle x, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \sigma(x), \sigma\rangle$ (règle AS_1) avec $e = x$, $v = \sigma(x)$ et $k_0 = 0$. La règle A_2 permet de conclure.

- $\langle \mathsf{Err}\ \mathsf{op}_2\ e', \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \mathsf{Err}, \sigma\rangle$ (règle AS_2) avec $k_0 = 0$. Impossible car $\mathsf{Err}\ \mathsf{op}_2\ e' \notin E_A$.

- $\langle n\ \mathsf{op}_2\ \mathsf{Err}, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \mathsf{Err}, \sigma\rangle$ (règle AS_3) avec $k_0 = 0$. Impossible car $n\ \mathsf{op}_2\ \mathsf{Err} \notin E_A$.

- $\langle n_1\ \mathsf{op}_2\ n_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle n, \sigma\rangle$ (règle AS_4) avec $\mathsf{op}_2\ \in \{+, -, \times\}$, $n = n_1\ \mathsf{op}_2\ n_2$ et $k_0 = 0$. Les règles A_1, A_5, A_6 et A_7 permettent de conclure :

$$(A_j)\frac{(A_1)\dfrac{}{\langle n_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_1} \quad (A_1)\dfrac{}{\langle n_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_2}}{\langle n_1\ \mathsf{op}_2\ n_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow n} \quad j \in \{5, 6, 7\}$$

Equivalence sémantique (11)

- $\langle n_1/n_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle n, \sigma\rangle$ (règle AS_5) avec $n_1 \in \mathbb{Z}$, $n_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $n = n_1/n_2$ et $k_0 = 0$. La règle A_9 permet de conclure :

$$(A_9)\frac{(A_1)\dfrac{}{\langle n_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_1} \quad (A_1)\dfrac{}{\langle n_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_2}}{\langle n_1/n_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow n}$$

- $\langle n_1/n_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle \mathsf{Err}, \sigma\rangle$ (règle AS_6) avec $n_1 \in \mathbb{Z}$, $n_2 = 0$, et $k_0 = 0$. La règle A_8 permet de conclure :

$$(A_8)\frac{(A_1)\dfrac{}{\langle n_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_1} \quad (A_1)\dfrac{}{\langle n_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow 0}}{\langle n_1/n_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}$$

Equivalence sémantique (12)

• $\langle e_1 \ \mathsf{op}_2 \ e_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_1' \ \mathsf{op}_2 \ e_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \langle e^k, \sigma\rangle$ avec $\langle e_1, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_1', \sigma\rangle$.
On distingue deux sous-cas :

(1). Si $e_1' \in E_A$, alors, par hypothèse d'induction, on a $\langle e_1' \ \mathsf{op}_2 \ e_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow v$ et le lemme précédent permet d'obtenir $\langle e_1 \ \mathsf{op}_2 \ e_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow v$.

(2). Si $e_1' \in E_A^+ \backslash E_A$, alors, puisque $e_1 \in E_A$, on a forcément $e_1 = n/0$ puisque la seule règle permettant d'introduire Err dans une expression ne contenant pas Err est la règle AS_6 et on a donc $v = e^k = \mathsf{Err}$. On peut alors conclure en construisant l'arbre :

$$(A_3)\dfrac{(A_8)\dfrac{(A_1)\dfrac{}{\langle n, \sigma\rangle \rightsquigarrow n} \quad (A_1)\dfrac{}{\langle 0, \sigma\rangle \rightsquigarrow 0}}{\langle n/0, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}}{\langle n/0 \ \mathsf{op}_2 \ e_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}$$

• $\langle e_1 \ \mathsf{op}_2 \ e_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_1 \ \mathsf{op}_2 \ e_2', \sigma\rangle \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \langle e^k, \sigma\rangle$ avec $\langle e_2, \sigma\rangle \hookrightarrow \langle e_2', \sigma\rangle$ et $e_1 \in \mathbb{Z}$. Raisonnement similaire au cas précédent.