APS – Examen du 3 Juin 2009

Durée : 1 heure.

Documents non autorisés

Rédiger les réponses à ce sujet sur une copie séparée

Les règles utiles dans les exercices qui suivent sont rappelées à la fin du sujet.

Exercice 1 A partir du langage d'expressions arithmétiques E_A, on construit le langage E_B d'expressions booléennes dont la syntaxe est définie comme suit :

$$(\mathbb{B}_1)\frac{}{t}\ (t \in \{\mathsf{true}, \mathsf{false}\}) \quad (\mathbb{B}_5)\frac{}{a_1 \leq a_2} \quad (\mathbb{B}_6)\frac{}{a_1 = a_2}\ (a_1, a_2 \in E_A)$$

$$(\mathbb{B}_2)\frac{b}{\mathsf{not}\ b} \quad (\mathbb{B}_3)\frac{b_1 \quad b_2}{b_1\ \mathsf{or}\ b_2} \quad (\mathbb{B}_4)\frac{b_1 \quad b_2}{b_1\ \mathsf{and}\ b_2}$$

La sématique opérationnelle de ce langage peut être définie comme suit :

$$(B_1)\frac{}{\langle t, \sigma\rangle \rightsquigarrow t} \quad t \in \mathbb{B}$$

$$(B_2)\frac{\langle a_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_1 \ \ \langle a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1 = a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow (n_1 = n_2)} \quad (B_3)\frac{\langle a_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_1 \ \ \langle a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1 \leq a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow (n_1 \leq n_2)} \quad \begin{array}{l} n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ a_1, a_2 \in E_A \end{array}$$

$$(B_4)\frac{\langle a_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}{\langle a_1 \leq a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}} \quad (B_5)\frac{\langle a_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_1 \quad \langle a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}{\langle a_1 \leq a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}$$

$$(B_6)\frac{\langle a_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}{\langle a_1 = a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}} \quad (B_7)\frac{\langle a_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow n_1 \quad \langle a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}{\langle a_1 = a_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}$$

$$(B_8)\frac{\langle b_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{true} \quad \langle b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow v}{\langle b_1\ \mathsf{and}\ b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow v} \quad (B_9)\frac{\langle b_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{false}}{\langle b_1\ \mathsf{and}\ b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{false}} \quad v \in \mathbb{B} \cup \{\mathsf{Err}\}$$

$$(B_{10})\frac{\langle b_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}{\langle b_1\ \mathsf{and}\ b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}$$

$$(B_{11})\frac{\langle b_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{false} \quad \langle b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow v}{\langle b_1\ \mathsf{or}\ b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow v} \quad (B_{12})\frac{\langle b_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{true}}{\langle b_1\ \mathsf{or}\ b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{true}} \quad v \in \mathbb{B} \cup \{\mathsf{Err}\}$$

$$(B_{13})\frac{\langle b_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}{\langle b_1\ \mathsf{or}\ b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}$$

$$(B_{14})\frac{\langle b, \sigma\rangle \rightsquigarrow t}{\langle \mathsf{not}\ b, \sigma\rangle \rightsquigarrow (\neg t)} \quad (B_{15})\frac{\langle b, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}{\langle \mathsf{not}\ b, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}} \quad t \in \mathbb{B}$$

1. En supposant que l'évaluation des expressions arithmétiques est déterministe, montrer le déterminisme de l'évaluation des expressions booléennes :

$$\forall e \in E_B \, \forall \sigma \, \forall v_1, v_2 \quad (\langle e, \sigma \rangle \rightsquigarrow v_1 \text{ et } \langle e, \sigma \rangle \rightsquigarrow v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$$

2. Obtient-on une sémantique équivalente si l'on remplace les règles B_8, B_9, B_{10}, B_{11}, B_{12} et B_{13} par les règles ci-dessous ? Pourquoi ?

$$(B'_8)\frac{\langle b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{true} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow v}{\langle b_1 \ \mathsf{and}\ b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow v} \quad (B'_9)\frac{\langle b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{false}}{\langle b_1 \ \mathsf{and}\ b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{false}}\ v \in \mathbb{B} \cup \{\mathsf{Err}\}$$

$$(B'_{10})\frac{\langle b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}{\langle b_1 \ \mathsf{and}\ b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}$$

$$(B'_{11})\frac{\langle b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{false} \quad \langle b_1, \sigma\rangle \rightsquigarrow v}{\langle b_1 \ \mathsf{or}\ b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow v} \quad (B'_{12})\frac{\langle b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{true}}{\langle b_1 \ \mathsf{or}\ b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{true}}\ v \in \mathbb{B} \cup \{\mathsf{Err}\}$$

$$(B'_{13})\frac{\langle b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}{\langle b_1 \ \mathsf{or}\ b_2, \sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}$$

Exercice 2 Dans cet exercice on considère le langage d'expressions fonctionnelles implanté lors des séances de TME.

1. Qu'est ce qu'une fermeture (i.e. la valeur d'une fonction) ? Rappeler de quoi une fermeture est constituée dans le cas d'une fonction non récursive et dans le cas d'une fonction récursive.
2. Décrire comment est évaluée l'application d'une fonction à un argument (qui est une expression du langage considéré). Distinguer le cas de l'application d'une fonction non récursive et le cas de l'application d'une fonction récursive. Donner les règles d'inférence correspondantes.
3. Expliquer les résultat des deux évaluations de l'expression `(f 3)` lors de la session OCaml suivante :

```
let y = 4;;
let f = function x -> x + y
(f 3);;
let y = 1
(f 3);;
```

Syntaxe des expressions arithmétiques.

$$(\mathbb{A}_1)\frac{}{n}\ (n \in \mathbb{Z}) \qquad (\mathbb{A}_2)\frac{}{x}\ (x \in V)$$

$$(\mathbb{A}_3)\frac{a_1 \quad a_2}{a_1 + a_2} \quad (\mathbb{A}_4)\frac{a_1 \quad a_2}{a_1 - a_2} \quad (\mathbb{A}_5)\frac{a_1 \quad a_2}{a_1 \times a_2} \quad (\mathbb{A}_6)\frac{a_1 \quad a_2}{a_1 / a_2}$$

Sémantique des expressions arithmétiques.

$$(A_1)\frac{}{\langle n,\sigma\rangle \rightsquigarrow n}\ (n\in\mathbb{Z}) \qquad (A_2)\frac{}{\langle x,\sigma\rangle \rightsquigarrow \sigma(x)}\ (x\in V)$$

$$(A_3)\frac{\langle a_1,\sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}{\langle a_1\ \mathsf{op}_2\ a_2,\sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}\ (\mathsf{op}_2 \in \{+,-,\times,/\})$$

$$(A_4)\frac{\langle a_1,\sigma\rangle \rightsquigarrow n_1 \quad \langle a_2,\sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}{\langle a_1\ \mathsf{op}_2\ a_2,\sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}} \qquad (n_1,n_2\in\mathbb{Z})$$

$$(A_5)\frac{\langle a_1,\sigma\rangle \rightsquigarrow n_1 \quad \langle a_2,\sigma\rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1+a_2,\sigma\rangle \rightsquigarrow n_1+n_2} \qquad (A_6)\frac{\langle a_1,\sigma\rangle \rightsquigarrow n_1 \quad \langle a_2,\sigma\rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1\times a_2,\sigma\rangle \rightsquigarrow n_1\times n_2}$$

$$(A_7)\frac{\langle a_1,\sigma\rangle \rightsquigarrow n_1 \quad \langle a_2,\sigma\rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1-a_2,\sigma\rangle \rightsquigarrow n_1-n_2} \qquad (A_8)\frac{\langle a_1,\sigma\rangle \rightsquigarrow n_1 \quad \langle a_2,\sigma\rangle \rightsquigarrow 0}{\langle a_1/a_2,\sigma\rangle \rightsquigarrow \mathsf{Err}}$$

$$(A_9)\frac{\langle a_1,\sigma\rangle \rightsquigarrow n_1 \quad \langle a_2,\sigma\rangle \rightsquigarrow n_2}{\langle a_1/a_2,\sigma\rangle \rightsquigarrow n_1/n_2}\ (n_2\neq 0)$$