

# M1 - APS

PARTIEL 29 avril 2009. Durée 60 minutes.

Rédigez sur une copie séparée

Rappels : Soit  $Proc$  un ensemble (fini) de processus CCS. Soit la suite d'équivalences définie par :  $\sim_0 = Proc \times Proc$  et  $s \sim_{n+1} t$  ssi  $s \sim_n t$  et :

- si  $s \xrightarrow{a} s'$  alors  $t \xrightarrow{a} t'$  pour un  $t'$  tel que  $s' \sim_n t'$
- si  $t \xrightarrow{a} t'$  alors  $s \xrightarrow{a} s'$  pour un  $s'$  tel que  $s' \sim_n t'$ .

La bisimulation forte sera définie ici par  $\sim = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sim_n$ .

L'ensemble  $\Phi_n$  des formules de HML de profondeur  $n$  au plus est défini inductivement par :

- $\Phi_0 = \{tt, ff\}$
- $\Phi_{n+1} = \Phi_n \cup \{F \wedge G, F \vee G, [a]F, \langle a \rangle F \mid F \in \Phi_n, a \in Act\}$

EXERCICE 1 1. Montrer par induction sur  $n$  que  $s \sim_n t$  implique que, pour toute formule  $\phi \in \Phi_n$ ,

- (i)  $s \models \phi \implies t \models \phi$  et
- (ii)  $t \models \phi \implies s \models \phi$ .

(Indication : pour montrer que si  $s \models [a]F$  alors  $t \models [a]F$ , on pourra montrer que : si  $s \models [a]F$  alors pour tout  $t'$  tel que  $t \xrightarrow{a} t'$ ,  $t' \models F$ .)

2. Montrer par induction sur  $n$  que, pour les processus dont chaque nœud a un nombre fini de successeurs, la propriété  $P_n$  suivante est vraie : "si  $s$  et  $t$  satisfont le même ensemble de formules de  $\Phi_n$ , alors  $s \sim_n t$ ". Indications : Montrer  $P_n$  pour  $n = 0$  ; puis supposer  $P_n$  vraie pour  $n$  et montrer que  $P_{n+1}$  est vraie aussi. Soient  $s$  et  $t$  qui satisfont le même ensemble de formules de  $\Phi_{n+1}$  :

2.1. Montrer que si  $s \xrightarrow{a} s'$ , alors on a aussi  $t \xrightarrow{a} t'$ .

2.2. Reasonner par l'absurde et supposer que pour tout  $t'_i$  tel que  $t \xrightarrow{a} t'_i$ , on a  $t' \not\sim_n s'$  :

- (i) en déduire une formule  $F$  de  $\Phi_n$  telle que  $\forall i, t'_i \not\models F$  et  $s' \models F$ .
- (ii) en déduire une contradiction. ◇

EXERCICE 2 Soient  $s_i$ ,  $i = 1, 2$ , deux processus dont on veut assurer l'exclusion mutuelle lors de leurs accès à une ressource commune ; le début et la fin de l'accès à la ressource commune seront faits pour chacun des deux processus par les actions  $d_i$  (début de section critique) et  $f_i$  (fin de section critique),  $i = 1, 2$ .

1. Ecrire en CCS un sémaphore  $sem$  qui assure l'exclusion mutuelle. (Vous écrirez les équations qui définissent  $s_1, s_2, sem$  et le système global  $S$ ).

2. Votre système  $S$  est-il équitable ?  $S$  peut-il bloquer ? (On supposera que  $s_1$  et  $s_2$  ne bloquent jamais et ne meurent jamais.) ◇